学習内容報告書

学校名	東京大学教育学部附属中等教育学校
授業者	今野雅典

1.　単元計画

1-1.　単元名

微分と積分（数学Ⅱ）および積分とその応用（数学Ⅲ）

1-2.　学年

５年生（高校２年生）および６年生（高校３年生）

1-3.　教科

数学

1-4.　単元の概要

微分と積分（数学Ⅱ）

　教科書におけるこの章は３つの節から成り立っている。１節では微分係数と導関数、２節では導関数の応用、３節では積分である。１節の微分係数と導関数では、簡単な整関数の導関数を求める。微分法の法則としては、定数倍の微分公式、和と差の微分公式を扱う。２節の導関数の応用では、グラフの接線の方程式の求め方、関数の増減と極値を調べてグラフをかく方法、区間で制限された関数の最大値・最小値の求め方、また、グラフを利用した方程式の実数解の個数を求めたり、不等式を証明したりすることへの応用を扱う。３節では、微分の逆演算として不定積分を定義し、これを用いて定積分を定義する。最後に定積分と面積の関係を明らかにし、整関数のグラフによって囲まれた部分の面積を求める。

積分とその応用（数学Ⅲ）

　教科書におけるこの章は３つの節から成り立っている。１節では微分の逆演算として不定積分を定義し、「数学Ⅲ」で新しく登場する有理関数、無理関数、指数関数・対数関数、三角関数およびそれらの合成関数の積分が求める。２節では、定積分の置換積分法・部分積分法と偶感数・奇関数の定積分、区分求積法と定積分の関係や定積分と不等式の関係を積分の性質として扱う。３節では、積分の応用として面積・体積を扱い、積分の有用性を知らせるとともに、曲線の長さについてはサイクロイドやアステロイド、カテナリーを学習する。

1-5.　単元設定の理由・ねらい

　積分は学習指導要領に位置づけられた学習内容であるが、日本の学校教育における積分の定義は、世界的にみても積分の歴史から見ても特異である。1-4 でも述べたように日本では微分の逆演算として積分を定義するが、積分の経緯から考えても区分求積法から定義することが自然であり、生徒にとっても積分の意味が分かりやすいと考える。本単元の設定理由の第１は、数学Ⅲで学ぶことになっている区分求積法を数学Ⅱで学ぶことが生徒の理解を促進するのではないかと考えたことにあり、さらに言えば、積分の学習の初歩の段階で学習することがそのねらいの１つである。

　第２の設定理由は、具体的な現象を通して数学的な考え方を学ぶことで、よりその考え方の理解の促進につながると考えたことである。具体的には、津波の到達時間を求めることを通して、本来は多くの水深距離

のデータが必要だが、海底の地形をモデル化することで少ないデータであっても求めることができる。そのために、少ないデータを使って関数関係を見出し、区分求積法の考え方を用いて立式し、積分計算をすることで津波の到達時間を求めるという学習を考えた。特に、地球規模で起こる現象の解析を教室の水槽実験のデータといくつかの水深データから求める体験は、高等学校程度の学習であっても日常の複雑な課題を解決できる可能性があるという気づきを与えるとともに、その課題解決の試行錯誤の経験を通して、数学の考え方（ここでは区分求積法）の理解を促進させると考えたからである。

第３の設定理由は、積分は面積を求める計算であると説明されることが多いが、実際には経済などでの活用のように必ずしも求積だけとは限らない。しかし、高等学校の学習内容は面積に限った説明になってしまう。その意味において、本単元で扱う課題は、積分で求められるが、面積で表されるものではない。これまでの学校教育ではあまり扱うことのないような内容で、求積とは直接関係のない積分の式を、現実場面を考察する中で考え方に触れさせ、立式することで悩ませたいというのがその理由である。

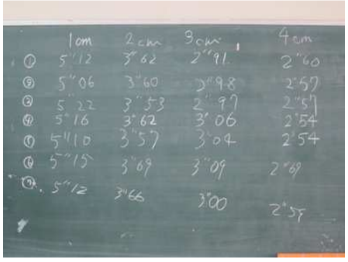
1-6.　育みたい資質や能力、態度

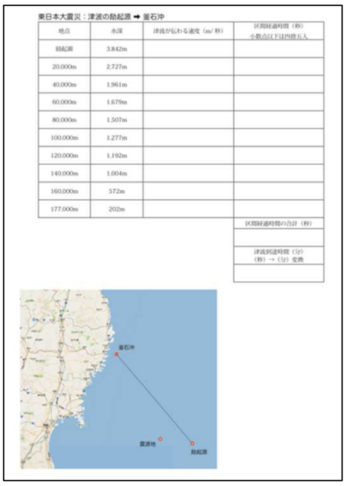
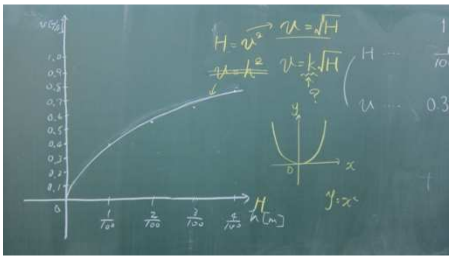
高等学校の数学の授業において，実際のデータをもとに考える事は少ないと考える。それゆえデータの処理方法に悩むことは予想される。それは実際のデータを単純化したり理想化したりすることの難しさと言い換えられよう。現実の問題を扱うからこそ，それを乗り越える必要性を感じることもできると考える。このように、実際のデータからモデルを作り学んだことを活用できるとともに、その活動を振り返り数学の考え方を学び直せるような態度を養いたい。

1-7.　単元の展開（全８時間）

以下は、数学Ⅱでの単元の展開である。数学Ⅲでの授業実践では、以下の表の３～５時間目にあたる時間を２時間の枠で特別授業として授業実践した。

時数	学習活動・主な内容	教師の指導 / 主な評価 外部連携 / 使用教材等
１・２	区分求積法による積分の導入。 初等幾何の知識で求積できる一次関数を題材にして、面積を求めることと積分による計算が同じ事であることを理解させる。初等幾何的に求積できない場合として、区分求積法の考え方を提示し実際に極限計算をすることで曲線を含む図形の面積を求めた。	対話的ではあるが、教員側から考え方を伝えるような指導方法で授業が実践された。指導内容は初等的な部分と学習内容の範囲外の内容であったため、数学Ⅱの教科書は使用できなかった。教師が課題を黒板に書き、解決のアイディアを生徒とともに考えながら授業が進んでいった。 評価については、具体的に面積が求められるようになることよりも、求めたい図形を短冊状に細かく分けることで曲線であっても面積が求められ、より細かく分けることにより計算した値が図形の面積に限りなく近づくという数学的な考え方が実感を伴って理解できれば良いものとした。

<table>
<tr>
<td>3
・
4</td>
<td>津波の速度を求める。
水槽実験により、水深と津波の速度との関係を立式した。
</td>
<td>水槽に水を張り、波を起こす実験を教室で行った。５年生の授業では１ｍ の長さの水槽、６年生の授業では 1.5m の長さの水槽を用いた。

水深を１cm、2cm、3cm と１cm 刻みに増やし、それぞれの場合での波の速度を求め、水深と波の速度の関係を立式した。なお、１ｍ の水槽は東京大学大学院教育学研究科附属海洋教育センター丹羽淑博特任准教授にお借りした。</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>東日本大震災で釜石に津波が到達するまでの時間を、20km 間隔に計測した水深データを利用して求める。水深データから津波の速度を算出し、速さの公式を利用して津波到達時間を求めた。
生徒は、さまざまな求め方が考えたが、いずれの方法を用いても誤差が生じる方法であった。誤差を少なくするために、水深データを増やせば良いことに気づかせ、その方法が区分求積法の考え方と同様に考えられるとなり、積分の記号を用いて式を立てる課題を提示して授業が終了した。</td>
<td>右のようなワークシートを配付し、空欄を埋めることで津波の到達時間を求めた。計算のために電卓を用意した。

東日本大震災：津波の励起源 ➡ 釜石沖
<table>
<tr><th>地点</th><th>水深</th><th>津波が伝わる速度（m/秒）</th><th>区間経過時間（秒）
小数点以下は四捨五入</th></tr>
<tr><td>励起源</td><td>3,842m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20,000m</td><td>2,727m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>40,000m</td><td>1,961m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60,000m</td><td>1,679m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>80,000m</td><td>1,507m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>100,000m</td><td>1,277m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>120,000m</td><td>1,192m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>140,000m</td><td>1,004m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>160,000m</td><td>572m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>177,000m</td><td>202m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>区間経過時間の合計（秒）</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>津波到達時間（分）
（秒）→（分）変換</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>6
・
7</td>
<td>生徒が立てた式を見比べながら、水深が励起源（津波が発生した地点）からの距離との関数になっていることに気づかせた。</td>
<td>生徒が立てた式を丁寧に検討する中で、その矛盾に気づき、関数関係に着目させた。

最終的な式は、教師の考え方を紹介することとし、３次関数以外にも別のモデルで考えられるはずであるとして、今後も生徒が考えられる部分を提示して授業を終えた。</td>
</tr>
</table>

2.　学習活動の実際

2-1.　単元における位置づけ

単元　7　時間中の　5　時間目

2-2.　本時の目標

・区間を縮めて総和を求める計算過程の振り返りながら，区分求積法の考え方の「学び直し」をする。
・計算結果が実際の値と異なることについて，その理由を批判的に検討する。

2-3.　本時の展開

主な学習活動 / 反応	教師の指導・支援 / 評価の視点（方法）
○前時に導いた式の比例定数（$v = k\sqrt{H}$）を測定値から導く。(H…水深、v…津波の速度) 〔生徒の反応〕前回の実験データからｋの値を 3.8 と算出した。なお、理論値は約$3.13 ≒ \sqrt{g}$ である。 （ワークシート配付）	○津波のモデルを説明する中で，重力加速度 g を想起させる。
○東日本大震災の釜石における津波到達時間を 20000m 間隔のデータを用いて考える。 ○表の見方の確認	○水深のデータがその地点における水深であることを確認する。
○津波の到達時間を求める。 〔生徒の反応〕 ・深い方の水深により時間を算出 ・浅い方の水深により時間を算出 ・水深の平均により時間を算出	○$v = \sqrt{g \cdot H}$を用いて，速度を電卓で計算し到達時間を求める。
○どのような時間を求めたのかを振り返り，求め方が違っていても同じ計算結果になる求め方を考える。 〔生徒の反応〕 ・区間をもっと細かくする。	○区分求積法を想起させるとともに、生徒に納得感を与えたい。
○到達時間を積分の記号を用いて表現する。 〔生徒の反応〕 $\int_0^{160,000} \frac{20,000}{\sqrt{9.8H}} dx + \int_{160,000}^{177,000} \frac{17,000}{\sqrt{9.8H}} dx$	○20000m や 4000m での計算過程を式に表すことで，何を縮めているのかを式の中で確認する。 ○H は定数なのかを考えさせる。

3.　今回の活動の自己評価

　単元構想は、現実場面への数学の適応だけでなく、その適応を通して数学の考え方を学び直すことにあった。具体的には、津波到達時間を求めるために積分を使うが、その活動を通して積分の考え方、特に区分求積法の考え方を学び直すことであった。細かくわけて考えるという発想が生徒に違和感なく、実感を伴って理解されたことは授業を通じて生徒から感じられた。

　生徒がどのように感じたのかについて、２つの調査を実施した。１つは単元終了段階での感想、もう１つは単元前後での質問紙調査である。前者では記述内容を点数化し、活動の振り返りを観点に生徒を３段階に分類した。後者の質問紙は項目ごとに点数化した。後者の質問項目の「あなたは数学がこれからも必要であると感じますか」に対して、高いレベルで活動を振り返っている生徒は単元前よりも単元後の方が必要だと感じており、逆に低いレベルでしか活動が振り返られていない生徒は必要だと感じるポイントが低下した。別の質問紙の項目の「あなたは数学が社会の中で役に立つと感じますか」に対しては、活動の振り返りが低いレベルであっても役立つと感じるようになった生徒もいた。その生徒に対してインタビュー調査を実施すると「自分は学際的な方向への進路を考えていて、今回の授業はまさに学際的だった。だから楽しかった」「考え方によってずれがあることが面白い。それは自然が綺麗じゃない（綺麗な数値で表せない）から」と答えていた。数学の授業で実験をすることは非常にまれであり、生徒の目には新鮮な授業故の感想ではあろうが、数学の授業の中に、地学・物理的な要素が入り交じり学際的であったことは確かである。学際的であれば難易度の上がる授業となり、ついて行けない生徒も発生するが、振り返りが低レベルの生徒であっても楽しかったと表現していたことは評価されるべき点であろう。

　本単元の授業は、５年生の授業の１時間は本校の公開研究会、６年生の授業は校内研究会で実施した。５年生の授業は学外から数学の教員を中心に 50 名ほどの参観し、６年生の授業は本校の教員が 20 名ほど参観した。実験をおこない内容的にも学際的な授業を外部に発信できたことは非常に有意義であった。特に公開研究会で 50 人の先生方を前にして、水槽に水を入れて波を起こしただけにも関わらず歓声が上がったことを考えると、いかに数学の授業が現実場面から離れて行われいることが改めて感じられた。生徒と一緒に事象を観察しなが授業をされる先生が１人でも増えれば、本単元を構想し実践した価値があると感じる。

4.　今後の課題

　実験装置を改善する必要がある。今回は、オールのような板を用意し、その板を手で動かすことで波を発生させた。複数回波を発生させ、座標平面上にプロットするとある程度、無理関数のグラフ上にのった。そういう意味では厳密な操作をせずに生徒に予想させたいグラフを作ることはできた。しかし生徒が抱く印象は、それぞれの結果を信じて良いのかどうかということにあった。実験装置の改良方法としては、水槽に仕切りをして水面を高くしておき、仕切りを外すことで波を起こすことや、実際の津波のように床を持ち上げるなどの方法が考えられる。波の発生を同質にする手立てを検討する必要がある。

　しかし、それぞれの結果を信じて良いのかという生徒の疑問は、生徒のより高度な行動への原動力にもなっている。これは高校３年生の授業での生徒の動きであるが、すべての実験結果を同等に利用するのではなく、信頼できる実験データだけを用いて考察を行っていた。将来自然を相手に研究をする場合には必要な技能であるが、中等教育段階では育成の対象から除かれる技能である。これは教室で実験をおこない、生徒がそれを見て、生徒自身がデータをとっているということがそのような行動を誘発したと考える。水槽に水を入れて波を起こすという単純な実験故に、繰り返しデータが取れるというのがこの活動の強みともいえる。

5.　本学習内容報告書活用にあたっての留意点

物理基礎では重力加速度を学んでおらず、高校２年生で授業した際には重力加速度を知らないことを前提に授業をすべきであった。本単元の構想と照らし合わせると、重力加速度を提示することよりも教室の実験から導いた式を、地球規模の現象で活用することができ、実際の値に近い結果が算出できる体験が重要だと考える。そういった観点からも、$v = \sqrt{g \cdot H}$ を導出することよりも実験データを大切にする授業設計の方がより望ましいものと考える。