学習指導案 東大附属

授　業　者　今野　雅典
学年クラス　５年Ａ組
教科（科目）　数学（数学 II）
テ　ー　マ　積　分

1　単元

微分積分

2　学習目標

（１）平均変化率の極限として微分係数を求めることができる。
（２）関数の導関数を求めることができる。
（３）導関数を用いて，関数の極大・極小を調べ，グラフがかける。
（４）不定積分と定積分との関係を理解する。

3　指導計画

（１）微分と導関数
（２）導関数の応用
（３）積分
（４）総合問題

4　本時の学習目標

（１）区間を縮めて総和を求める計算過程の振り返りながら，区分求積法の考え方の「学び直し」をする。
（２）計算結果が実際の値と異なることについて，その理由を批判的に検討する。

5　生徒所見

５年以降の数学はすべて自由選択の科目となっている。このクラスは生徒 31 名（男子 13 名，女子 18 名）が受講している。数学に苦手意識を持っている生徒も多いが，課題を解決しようとする姿勢は評価したい。生徒の中で東日本大震災と関係がある生徒について，該当生徒がいないことを入学時の学年の教員に確認をとっている。

6　教材について・指導上の工夫

水深（H）と津波の速度（v）の関係式 $v=\sqrt{g\cdot H}$ （g は重力加速度）と水深のデータを利用して津波の到達時間を推測する課題である。関係式から水深が深いほど津波の速度が速いことが分かる。陸から離れるほど水深が深くなることから津波の速度は次第に遅くなる。区間 AB における A 地点とＢ地点の２つの水深データからは３通りの区間通過時間が考えられる。それは，①深い方の水深による区間通過時間，②浅い方の水深による区間通過時間，②水深の平均による区間通過時間である。授業では津波が発生した地点（津波の励起源）から釜石沖までの 177km を 20km 間隔の１０個の水深データから到達時間を推測する。次に 4km 間隔の 46 個の水深データから到達時間を推測する。次の表は，それぞれのデータについて，①～③により津波到達時間を求めたものである。

	20km 間隔	4km 間隔
①深い方の水深による区間通過時間	24 分 43 秒	26 分 32 秒
②浅い方の水深による区間通過時間	30 分 02 秒	27 分 38 秒
③水深の平均による区間通過時間	26 分 43 秒	27 分 03 秒

この表から間隔が短いと①と②との差が小さいことが分かる。正確な津波到達時間を推測するために，間隔をさらに短くしたデータをもとに計算しようとすることは，区間を狭めて求積する区分求積法の考え方と重なり，それは積分に通じる考え方である。本授業は区分求積法を既習事項としているが，区分求積法を活用して課題を解決するのを目的としているわけではなく，むしろ実際のデータをもとに課題を解決する過程を通して，また計算方法を振り返る中で，区分求積法を「学び直す」ことを目的としている。

次に，本授業で使用するデータについて説明する。津波の励起源の位置は「滑り分布モデルから想定される上下変動」[*1]をもとに推定し 38.04167°N, 143.4149°E とした。 釜石沖には GPS 波浪計を設置して波高を計測しており，東日本大震災の津波第 1 波のグラフがインターネット上で公開されている。[*2]この GPS 波浪計が設置されている位置[*3]を 39.2586°N,142.0969°E とした。この励起源と GPS 波浪計の距離を 4km 間隔で区切り，44 地点を定め, その位置情報をもとに水深を求めた。日本近海の水深は日本海洋データセンター[*4]の Web ページから入手することが可能である。ただし 500m メッシュでのデータのため，必ずしも特定した 46 地点（励起源と GPS 波浪計が設置されている地点とその間の 44 地点）における水深データが存在するわけではない。そこで，各地点の位置から半径 550m 以内の水深データの平均値を各地点の水深とした。4km 間隔のデータを用いて 20km 間隔のデータを作成した。次の表は，20km 間隔の水深データを作成するために使用した各地点の位置情報と水深である。

位置	緯度	経度	水深
励起源	38.04167	143.4149	3842
20km	38.17963	143.26824	2727
40km	38.31748	143.12156	1961
60km	38.45493	142.97375	1679
80km	38.59238	142.82561	1507
100km	38.72964	142.67721	1277
120km	38.86637	142.52829	1192
140km	39.00323	142.37827	1004
160km	39.13991	142.22831	572
177km	39.2586	142.0969	202

東日本大震災は 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分 18 秒に発生した。津波の発生時刻はその時刻とした。釜石沖の GPS 波浪計の波高データから津波第 1 波が到達した時刻は 15 時 11 分 30 秒であると推測できる。津波到達時間は 25 分 12 秒である。これは 20km 間隔のデータによる①と②の間にあるが，4km 間隔のデータから予測した値の間には存在しない。水深データから予測した津波到達時間よりも実際の津波到達時間の方が短い。その理由を考えることは，データの取り方の改善，モデルの吟味につながり，批判的に

[*1] 国土地理院「平成 23 年 (2011 年) 東北地方太平洋沖地震の滑り分布モデルから計算される上下変動」, http://www.gsi.go.jp/common/000060406.pdf
[*2] 国土交通省「岩手南部沖 GPS 波浪計 (釜石沖) による津波の観測結果概要」,http://www.mlit.go.jp/common/000139231.pdf
[*3] https://nowphas.mlit.go.jp/sp/chiten.htm
[*4] http://www.jodc.go.jp/jodcweb/index_j.html

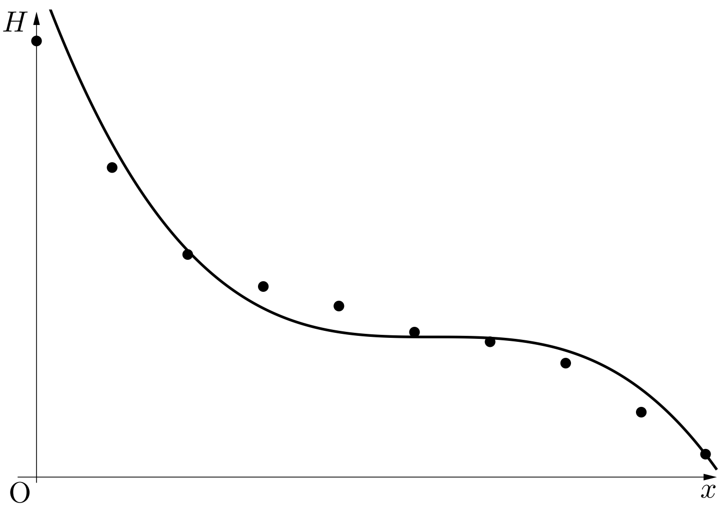
物事を考えることや精緻に物事を捉えることにつながると考える。それは考える市民と重なる姿である。

高等学校の数学の授業において，実際のデータをもとに考える事は少ないと考える。それゆえデータの処理方法に悩むことは予想される。それは実際のデータを単純化したり理想化したりすることの難しさと言い換えられよう。しかし，現実の問題を扱うからこそ，それを乗り越える必要性を感じることもできると考える。本教材は励起源からの距離 x とその地点における水深 H を x の関数として捉えられ $H(x)$ を定式化できれば，$\displaystyle\int_0^{177000} \frac{1}{\sqrt{g \cdot H(x)}}dx$ を計算することにより津波到達時間が推測できるとも考えられる。

次のグラフは，$H(x) = ax^3$（３次関数）による近似を想定した場合の例である。100km 地点と 120km 地点の水深の平均値から得られる値の組を変曲点とし，177km 地点の水深を値の組とした点を通過点とするグラフである。関係式は

$$H(x) = -\frac{1234.5 - 200}{(177000 - 105000)^3}(x - 105000)^3 + 1234.5$$

である。計算機を用いると津波到達時間は 1571.164523131602 と算出される。約 26 分 11 秒である。



$H = -\dfrac{1234.5 - 200}{(177000 - 105000)^3}(x - 105000)^3 + 1234.5$ による近似

7　本時の学習と「探究」「協働」「市民性」３つの観点との関連

「探　究」･･･ 活動の振り返り通して「学び直し」をすること。予想に反する結果が出た場合に，モデルを修正しながら精緻に解決を図ること。

「協　働」･･･ 自身が課題を解決するために他者と疑問を共有すること。他者の課題を解決しようとすること。他者の課題を検討する中で自身の理解が深まること。

「市民性」･･･ 課題の意義を理解し，批判的に検討し，導いた結果を他者にも還元すること。

8　評価

（１）区間を縮めて総和を求める計算過程の振り返りながら，区分求積法の考え方の「学び直し」ができたか。

（２）計算結果が実際の値と異なることについて，その理由を批判的に検討できたか。

9　授業の展開

	学習事項	学習活動	留意事項
導入 5分	○関係式 $v=\sqrt{g\cdot H}$ の確認 $H\cdots$ 水深 $v\cdots$ 津波の速度） （ワークシート配付） ○東日本大震災の釜石における津波到達時間を 20000m 間隔のデータを用いて考える。	○前時に導いた式（$v=k\sqrt{H}$）の比例定数を測定値から導く。 ○表の見方の確認	○津波のモデルを説明する中で，重力加速度 g を想起させる。 ○水深のデータがその地点における水深であることを確認する。
展開1 15分	○津波の到達時間を求める。 ○どのような時間を求めたのかを振り返り，現実場面に近づけるための計算処理を考える ○実際の津波到達時間を提示 （25 分 12 秒）	○ $v=\sqrt{g\cdot H}$ を用いて，速度を電卓で計算し到達時間を求める。 ○（予想される生徒の考え） ・深い方の水深により時間を算出 （24 分 43 秒） ・浅い方の水深により時間を算出 （30 分 02 秒） ・水深の平均により時間を算出 （26 分 43 秒）	○グループ形式にする。電卓を配付する。 ○釜石での速度(44.5m/s)の活用法を確認する。
展開2 10分	○正確な時間が推測できなかった理由を考える。 ○ 4000m 間隔のデータを提示 ○正確な時間が推測できなかった理由を考える。	○（予想される生徒の考え） ・間隔が長いので不正確 ・水深のデータが正しくない ○到達時間を計算 ・深い方の水深により時間を算出 （26 分 32 秒） ・浅い方の水深により時間を算出 （27 分 38 秒） ・水深の平均により時間を算出 （27 分 03 秒） ○（予想される生徒の考え） ・水と海水の違い ・海底の地形が変化した ・データが正しくない ・地震発生から津波発生までの時間 ・GPS 波浪計が流された	○ 4000m 間隔のデータの計算は生徒の取組状況に応じてパソコンを使用して求める。
展開3 15分	○計算過程の振り返り ○到達時間を積分の記号を用いて表現する。	○間隔を縮めると推測される時間の幅が狭まることを確認 ○（予想される生徒の考え） ・$\displaystyle\int_0^{177000}\frac{20000}{\sqrt{g\cdot H}}dx$ ・$\displaystyle\int_0^{177000}\frac{1}{\sqrt{g\cdot H}}dx$	○ 20000m や 4000m での計算過程を式に表すことで，何を縮めているのかを式の中で確認する。 ○ H は定数なのかを考えさせる。
まとめ 5分	○水深 (H) を励起源からの距離 (x) の関数として定式化できるか検討する。	○（予想される生徒の考え） ・１次関数 ・３次関数 ・sin 関数を横に向けた形	○必要に応じてパソコンでグラフを見せる。

５年　　組　　番　氏名

水深	１cm	２cm	３cm	４cm		
ウォッチ１						
ウォッチ２						
ウォッチ３						
ウォッチ４						
ウォッチ５						
ウォッチ６						
ウォッチ７						
平均時間						
速度（ m/ 秒）						

5年　　組　　番　氏名

東日本大震災：津波の励起源 ➡ 釜石沖

地点	水深	津波が伝わる速度（m/ 秒）	区間経過時間（秒） 小数点以下は四捨五入
励起源	3,842m		
20,000m	2,727m		
40,000m	1,961m		
60,000m	1,679m		
80,000m	1,507m		
100,000m	1,277m		
120,000m	1,192m		
140,000m	1,004m		
160,000m	572m		
177,000m	202m		
			区間経過時間の合計（秒）
			津波到達時間（分） （秒）→（分）変換

５年　　組　　番　氏名

東日本大震災：津波の励起源 ➡ 釜石沖

地点	水深	津波が伝わる速度（m/ 秒）	区間経過時間（秒） 小数点以下は四捨五入
励起源	3,842m		
4,000m	3,465m		
8,000m	3,266m		
12,000m	3,095m		
16,000m	2,847m		
20,000m	2,727m		
24,000m	2,538m		
28,000m	2,268m		
32,000m	2,141m		
36,000m	1,959m		
40,000m	1,961m		
44,000m	2,039m		
48,000m	2,028m		
52,000m	1,861m		
56,000m	1,750m		
60,000m	1,679m		
64,000m	1,634m		
68,000m	1,563m		
72,000m	1,578m		
76,000m	1,568m		
80,000m	1,507m		
84,000m	1,434m		
88,000m	1,380m		
92,000m	1,346m		
96,000m	1,305m		
100,000m	1,277m		
104,000m	1,268m		
108,000m	1,245m		
112,000m	1,216m		
116,000m	1,202m		
120,000m	1,192m		
124,000m	1,154m		
128,000m	1,098m		
132,000m	1,045m		
136,000m	1,010m		
140,000m	1,004m		
144,000m	949m		
148,000m	821m		
152,000m	761m		
156,000m	671m		
160,000m	572m		
164,000m	468m		
168,000m	374m		
172,000m	297m		
176,000m	223m		
177,000m	202m		
			区間経過時間の合計（秒）
			津波到達時間（分） （秒）→（分）変換

学習指導案 2019/11/7　東大附属

授　業　者　　今野　雅典
学年クラス　　６年
教科（科目）　数学（数学 III）
テ　ー　マ　　積　分

1　単元

積分

2　指導計画

特別授業のため計画はない。積分は数学 II 及び数学 III の学習内容である。数学 III は教科書での順序を入れ替えて授業をしており、現段階で積分の学習は終了している。

3　本時の学習目標

（１）実験データから関係を見出し、関係式をもとに具体的事象の分析に役立てることができる。
（２）具体的事象の分析に、積分の考え方が活用できることを理解できる。
（３）具体的事象を表現する式を、適切に関数を定めた上で、積分の考え方を使って立式できる。

4　生徒所見

５年以降の数学はすべて自由選択の科目となっており、このクラスは主に理系に関心が強い生徒が履修している（と思われる)。普段は細矢教諭が６単位時間で指導しているクラスである。

5　教材について・指導上の工夫

水深（H）と津波の速度（v) の関係式 $v = \sqrt{g \cdot H}$ （g は重力加速度）と水深のデータを利用して津波の到達時間を推測する課題である。関係式から水深が深い（浅い）ほど津波の速度が速い（遅い）ことが分かる。陸に近づくほど水深が浅くなることから津波の速度は次第に遅くなる。区間 AB における A 地点とＢ地点の２つの水深データからは３通りの区間通過時間が考えられる。それは，①深い方の水深による区間通過時間，②浅い方の水深による区間通過時間，②水深の平均による区間通過時間である。授業では津波が発生した地点（津波の励起源）から釜石沖までの 177km を 20km 間隔の１０個の水深データから到達時間を推測する。次に 4km 間隔の 46 個の水深データから到達時間を推測する。次の表は，それぞれのデータについて，①～③により津波到達時間を求めたものである。

	20km 間隔	4km 間隔
①深い方の水深による区間通過時間	24 分 43 秒	26 分 32 秒
②浅い方の水深による区間通過時間	30 分 02 秒	27 分 38 秒
③水深の平均による区間通過時間	26 分 43 秒	27 分 03 秒

この表から間隔が短いと①と②との差が小さいことが分かる。正確な津波到達時間を推測するために，間隔をさらに短くしたデータをもとに計算しようとすることは，区間を狭めて求積する区分求積法の考え方と重なり，それは積分に通じる考え方である。本授業は区分求積法を既習事項としているが，区分求積法を活用して課題を解決するのを目的としているわけではなく，むしろ実際のデータをもとに課題を解決

する過程を通して，また計算方法を振り返る中で，区分求積法を「学び直す」ことを目的としている。

次に，本授業で使用するデータについて説明する。津波の励起源の位置は「滑り分布モデルから想定される上下変動」*1をもとに推定し 38.04167°N, 143.4149°E とした。 釜石沖には GPS 波浪計を設置して波高を計測しており，東日本大震災の津波第 1 波のグラフがインターネット上で公開されている。*2この GPS 波浪計が設置されている位置*3を 39.2586°N,142.0969°E とした。この励起源と GPS 波浪計の距離を 4km 間隔で区切り，44 地点を定め, その位置情報をもとに水深を求めた。日本近海の水深は日本海洋データセンター*4の Web ページから入手することが可能である。ただし 500m メッシュでのデータのため，必ずしも特定した 46 地点（励起源と GPS 波浪計が設置されている地点とその間の 44 地点）における水深データが存在するわけではない。そこで，各地点の位置から半径 550m 以内の水深データの平均値を各地点の水深とした。4km 間隔のデータを用いて 20km 間隔のデータを作成した。次の表は，20km 間隔の水深データを作成するために使用した各地点の位置情報と水深である。

位置	緯度	経度	水深
励起源	38.04167	143.4149	3842
20km	38.17963	143.26824	2727
40km	38.31748	143.12156	1961
60km	38.45493	142.97375	1679
80km	38.59238	142.82561	1507
100km	38.72964	142.67721	1277
120km	38.86637	142.52829	1192
140km	39.00323	142.37827	1004
160km	39.13991	142.22831	572
177km	39.2586	142.0969	202

東日本大震災は 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分 18 秒に発生した。津波の発生時刻はその時刻とした。釜石沖の GPS 波浪計の波高データから津波第 1 波が到達した時刻は 15 時 11 分 30 秒であると推測できる。津波到達時間は 25 分 12 秒である。これは 20km 間隔のデータによる①と②の間にあるが，4km 間隔のデータから予測した値の間には存在しない。水深データから予測した津波到達時間よりも実際の津波到達時間の方が短い。その理由を考えることは，データの取り方の改善，モデルの吟味につながり，批判的に物事を考えることや精緻に物事を捉えることにつながると考える。それは考える市民と重なる姿である。

高等学校の数学の授業において，実際のデータをもとに考える事は少ないと考える。それゆえデータの処理方法に悩むことは予想される。それは実際のデータを単純化したり理想化したりすることの難しさと言い換えられよう。しかし，現実の問題を扱うからこそ，それを乗り越える必要性を感じることもできると考える。本教材は励起源からの距離 x とその地点における水深 H を x の関数として捉えられ $H(x)$ を定式化できれば，$\displaystyle\int_0^{177000} \frac{1}{\sqrt{g \cdot H(x)}} dx$ を計算することにより津波到達時間が推測できるとも考えられる。

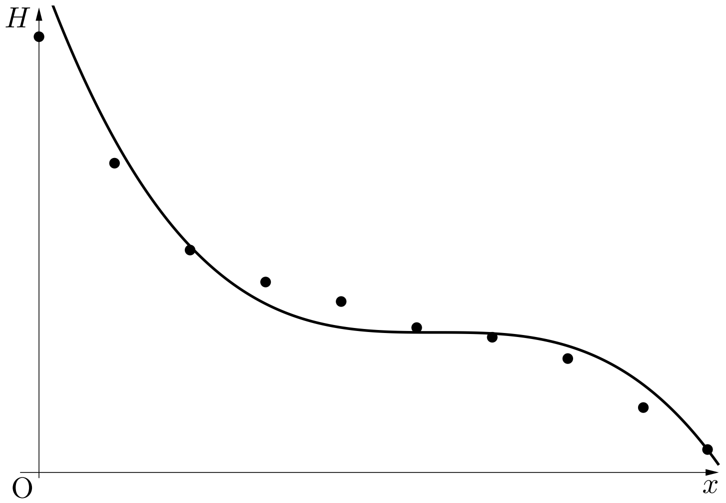
次のグラフは，$H(x) = ax^3$（３次関数）による近似を想定した場合の例である。100km 地点と 120km 地点の水深の平均値から得られる値の組を変曲点とし，177km 地点の水深を値の組とした点を通過点とす

*1 国土地理院「平成 23 年 (2011 年) 東北地方太平洋沖地震の滑り分布モデルから計算される上下変動」, http://www.gsi.go.jp/common/000060406.pdf
*2 国土交通省「岩手南部沖 GPS 波浪計 (釜石沖) による津波の観測結果概要」,http://www.mlit.go.jp/common/000139231.pdf
*3 https://nowphas.mlit.go.jp/sp/chiten.htm
*4 http://www.jodc.go.jp/jodcweb/index_j.html

るグラフである。関係式は

$$H(x) = -\frac{1234.5-200}{(177000-105000)^3}(x-105000)^3 + 1234.5$$

である。計算機を用いると津波到達時間は 1571.164523131602 と算出される。約 26 分 11 秒である。



$H = -\dfrac{1234.5-200}{(177000-105000)^3}(x-105000)^3 + 1234.5$ による近似

6　評価

（１）実験データから関係を見出し、関係式をもとに具体的事象の分析に役立てることができたか。

（２）具体的事象の分析に、積分の考え方が活用できることを理解できたか。

（３）具体的事象を表現する式を、適切に関数を定めた上で、積分の考え方を使って立式できたか。

7　授業の展開

	学習事項	学習活動	留意事項
導入 5分	○学習課題「水槽実験をもとに、東日本大震災での釜石までの津波到達時間を求める」の提示	○学習課題を理解し、解決の手順を考える。	○配付物：水深のデータ、iPad（班に1台）、電卓
展開1 20分	○実験データを分析し、関係式を見出す。 ○関係式は $v = \sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$ $H \cdots$ 水深（m） $v \cdots$ 波の速度（m/s） $g \cdots$ 重力加速度 $(\sqrt{g} \fallingdotseq 3.13)$ ○到達時間の多様な求め方に触れる。	○水槽実験を観察・分析。実験は4回（水深は1，2，3，4 cm） ○各回の実験を iPad で動画撮影し、波の速度（m/s）を求める。 ○4回の実験をもとに、水深と波の速度の関係を立式する。 ○関係式をもとに、釜石までの津波到達時間を求める。 ○各班が求めた結果及びその求め方を共有する。	○ワークシートを配付する。 ○ $\sqrt{g}$ $(\fallingdotseq 3.13)$ は定数である。本時では実験データをもとに算出するため、各班で $\sqrt{g}$ に対する値は異なる。 ○生徒が算出した比例定数が $\sqrt{g}$ であることには触れない。
展開2 10分	○水深データを多くする（区間を増やす・間隔を短くする）ことで、結果の精度が高まることの理解。 ○区分求積法，積分の考え方の確認。	○検討1「津波到達時間を求めた過程を振り返って、求め方に荒さがあるとすれば、どのような点ですか」を考える。 ○津波の到達時間を積分記号を用いて立式する。（検討2） ○（予想される生徒の考え） ・$\displaystyle\int_0^{177000} \frac{20000}{\sqrt{g \cdot H}} dx$ ・$\displaystyle\int_0^{177000} \frac{1}{\sqrt{g \cdot H}} dx$	○ワークシートを配付する。 ○記号の定義についての質問が出た場合、適切に定義した上で使用するように指示する。 ○各班の考えを黒板に書かせるが、出揃わなくても時間で区切り、展開3の時間を確保する。
展開3 10分	○区分求積法の考え方と積分の式の関係についての検討。 ○定数、変数（独立変数、従属変数)、関数の違いの検討。 ○関数を見出す。	○各班で考えた式を全体で検討する。 ○励起源からの距離を x とすると水深は x の関数 $f(x)$ として表現される。	○ H は定数なのかを考えさせる。 ○生徒が中心となって議論する環境を整える。
まとめ 5分	○議論を受けて、立式する。 ○活動の振り返り。	○ワークシートの検討3に取り組む。 ○ワークシートの質問に取り組む。	